قسم الرياضيات
Department of Mathematics

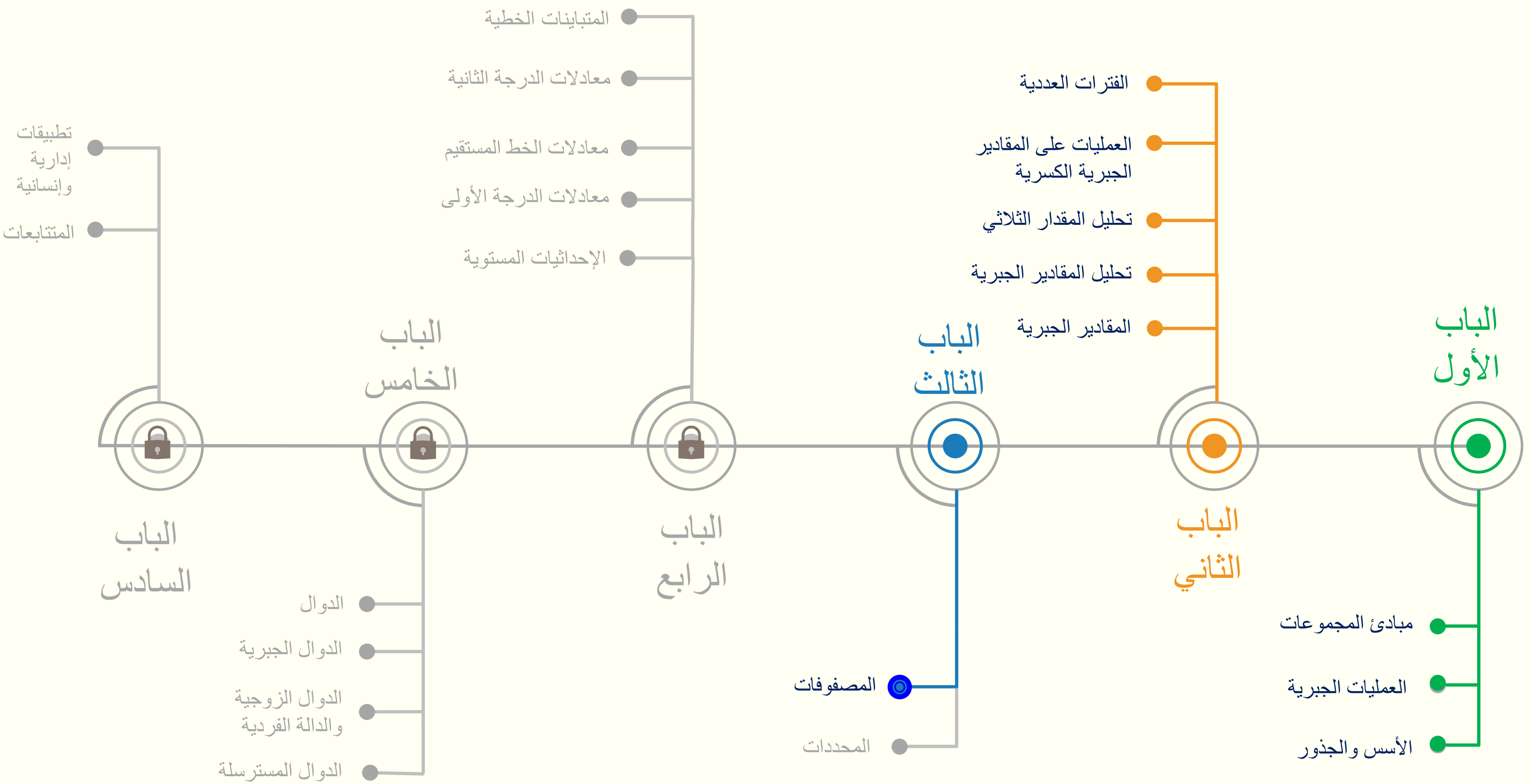
MATH 111

الرياضيات للمسار الإداري والإنساني

إعداد قسم الرياضيات بجامعة الملك عبدالعزيز

الطبعة الثانية 1442هـ - 2021م

الطبعة الثانية 1442هـ - 2021م



الباب الثالث

المصفوفات والمحددات

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3-1 المصفوفات

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3-2 المحددات

الطبعة الثانية 1442هـ - 2021م

قسم الرياضيات
Department of Mathematics

الباب الثالث : المصفوفات والمحددات

3-1 المصفوفات

تعريف المصفوفة

- المصفوفة هي عبارة عن ترتيبة مستطيلة من العناصر مرتبة في صفوف أفقية وأعمدة رأسية، وتكون محاطة بأقواس على الصورة ( ) وتكون عناصر المصفوفة أعداداً حقيقية أو مجاهيلاً.
- نرمز للمصفوفة بالحروف الكبيرة ... B و A.

تعريف رتبة المصفوفة

❖ إذا كانت المصفوفة A لها m من الصفوف و n من الأعمدة يقال بأن المصفوفة من الرتبة $m \times n$ وتُقرأ $(m \text{ by } n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \boxed{a_{ij}} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nb} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

a_{ij} ترمز للعنصر الذي يقع في الصف رقم i ، العمود رقم j حيث:

$i = 1,2, \dots, m$

$j = 1,2, \dots, n$

مثال أوجد رتبة المصفوفات التالية:

$$1)\quad A=\begin{pmatrix}31 & -2\\ 3 & 2\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

بما أن عدد صفوف المصفوفة A يساوي 3 وعدد أعمدتها يساوي 2
فإن رتبة المصفوفة A هي 3×2.

$$2)\quad B=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$$

بما أن عدد صفوف المصفوفة B يساوي 3 وعدد أعمدتها يساوي 1
فإن رتبة المصفوفة B هي 3×1.

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ e & 7 & c \end{pmatrix}$

بما أن عدد صفوف المصفوفة C يساوي 2 وعدد أعمدتها يساوي 3
فإن رتبة المصفوفة C هي 2×3.

4) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

بما أن عدد صفوف المصفوفة D يساوي 1 وعدد أعمدتها يساوي 4
فإن رتبة المصفوفة D هي 1×4.

5) $E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 6 \\ 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

بما أن عدد صفوف المصفوفة E يساوي 3 وعدد أعمدتها يساوي 3
فإن رتبة المصفوفة E هي 3×3.

أشكال المصفوفات

المصفوفة المربعة

هي مصفوفة عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها أي أن $m = n$ وتاخذ الشكل

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

وتكون رتبتها $n \times n$.

أشكال المصفوفات

مصفوفة الصف

هي مصفوفة تحتوي على صف واحد فقط وعدد من الأعمدة وتأخذ الشكل التالي

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

وتكون رتبتها $1 \times n$.

أشكال المصفوفات

مصفوفة العمود

هي مصفوفة تحتوي على عمود واحد فقط وعدد من الصفوف وتأخذ الشكل

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

وتكون رتبتها $1 \times m$.

أشكال المصفوفات

المصفوفة الصفرية

هي مصفوفة من الرتبة $m \times n$ جميع عناصرها أصفار ويرمز لها بالرمز $O_{m\times n}$.

$$O_{3\times 2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad O_{2\times 2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

أشكال المصفوفات

المصفوفة القطرية

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ماعدا عناصر القطر الرئيسي.

❖ عناصر القطر الرئيسي هي العناصر a_{ii}.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

أشكال المصفوفات

المصفوفة القياسية

هي المصفوفة القطرية التي جميع عناصر قطرها الرئيسي متساوية مثل

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

أشكال المصفوفات

مصفوفة الوحدة

هي مصفوفة قطرية جميع عناصرها أصفار ما عدا القطر الرئيسي كل عناصره تساوي الواحد الصحيح ويرمز لها بالرمز $I_{n\times n}$.

$$I_{2\times 2}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$I_{3\times 3}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

مدور المصفوفة

إذا كانت A مصفوفة من رتبة $m \times n$ فإن **مدور المصفوفة** هي مصفوفة جديدة رتبتها $n \times m$ بجعل صفوف A أعمدة أو الأعمدة صفوف مع المحافظة على الترتيب ويرمز لها بالرمز A^T.

مدور المصفوفة

مثال

أوجد مدور المصفوفات التالية:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

2) $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{3 \times 1} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}_{1 \times 3}$

مدور المصفوفة

مثال

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ e & 7 & c \end{pmatrix}_{2\times 3} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} 1 & e \\ a & 7 \\ 4 & c \end{pmatrix}_{3\times 2}$

4) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}_{1\times 4} \Rightarrow D^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}_{4\times 1}$

5) $E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 6 \\ 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}_{3\times 3} \Rightarrow E^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ -2 & -1 & 9 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

مدور المصفوفة

نتيجة

إذا كانت A مصفوفة من رتبة $m \times n$ فإن

$$(A^T)^T = A$$

تساوي المصفوفات

تعريف (تساوي المصفوفات):

يقال إن المصفوفتين $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ متساويتان إذا كان:

1) رتبة المصفوفة A تساوي رتبة المصفوفة B.

2) العناصر المتناظرة متساوية أي أن لكل i, j

$$a_{ij} = b_{ij}$$

تساوي المصفوفات

مثال

إذا كانت $B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وكانت $A = B$

فأوجد قيمة المتغيرات x و y

بما أن $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$

فإن $x = 1$, $y = 2$

جبر المصفوفات

مثال أوجد قيمة المتغيرات x و y إذا كان

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ x & 3 \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ x & 3 \end{pmatrix}^T$$

إذا

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & x \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

فإن

$$x = 2, \qquad y = 3$$

جبر المصفوفات

جمع المصفوفات

إذا كانت $A = (a_{ij})_{m\times n}$ و $B = (b_{ij})_{m\times n}$ مصفوفتين لهما نفس الرتبة، فإن

حاصل جمع المصفوفتين B و A يعرف بأنه المصفوفة $C = (c_{ij})_{m\times n}$ والتي

لها نفس رتبة المصفوفتين B و A وعناصرها

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

لجميع قيم i, j وعندها نكتب $C = A + B$

جبر المصفوفات

طرح المصفوفات

إذا كانت $A = (a_{ij})_{m\times n}$ و $B = (b_{ij})_{m\times n}$ مصفوفتين لهما نفس الرتبة، فإن

حاصل طرح المصفوفة B من المصفوفة A يعرف بأنه المصفوفة

$D = (d_{ij})_{m\times n}$ والتي لها نفس رتبة المصفوفتين B و A وعناصرها

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

لجميع قيم i, j وعندها نكتب $D = A - B$

جبر المصفوفات

مثال

إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

فأوجد $A + B$ و $A - B$

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + (-4) & 2 + 1 \\ -1 + 6 & 0 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - (-4) & 2 - 1 \\ -1 - 6 & 0 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$$

خصائص عملية جمع المصفوفات

نفرض أن A,B,C ثلاث مصفوفات لهم نفس الرتبة وإن المصفوفة الصفرية O لها نفس الرتبة فإن:

1) جمع المصفوفات إبدالي $A+B=B+A$

2) جمع المصفوفات تجميعي $A+(B+C)=(A+B)+C$

3) المحايد الجمعي $A+O=O+A=A$

4) المعكوس الجمعي $A+(-A)=O$

5) مدور مجموع مصفوفتين $(A+B)^T=A^T+B^T$

جبر المصفوفات

ضرب المصفوفات في ثابت k

إذا كان لدينا المصفوفة $A = (a_{ij})_{m\times n}$ و k عدد حقيقي، فإن حاصل ضرب العدد k في المصفوفة A يشكل مصفوفة عناصرها جميع عناصر المصفوفة A مضروبة في العدد k أي أن:

$$kA = (ka_{ij})_{m\times n}$$

جبر المصفوفات

مثال إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

فأوجد $3A$، $-2B$، $3A - 2B$

$$3A = 3\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 5 & 3 \times -2 \\ 3 \times -1 & 3 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-2B = -2\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \times -4 & -2 \times 1 \\ -2 \times 6 & -2 \times -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 15 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -8 \\ -15 & 6 \end{pmatrix}$$

تمارين للمراجعة

- اختر الإجابة الصحيحة

إذا كانت المصفوفة A مربعة من الرتبة 3×3 فلا يمكن أن تحتوي على العنصر

a_{32} ☐ a_{21} ☐ a_{41} ☐ a_{22} ☐

تمارين للمراجعة

- هل العبارة التالية صحيحة (T) أم خاطئة (F)

قيمة العنصر a_{13} في المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -6 & 7 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

-1	3	0	5

تمارين للمراجعة

- اختر الإجابة الصحيحة

إذا كانت المصفوفة A من الرتبة 5×4 فعدد الصفوف تكون في المصفوفة

$$\left(\frac{1}{4}A^{T}\right)^{T}$$

1	5	4	20

تمارين للمراجعة

- هل العبارة التالية صحيحة (T) أم خاطئة (F)

إذا كانت $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ وكانت $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

وكانت $C = (c_{ij}) = (3B - 2A)^T$

فإن $c_{22} = -6$

T F

تمارين للمراجعة

- هل العبارة التالية صحيحة (T) أم خاطئة (F)

إذا كانت المعادلة $\begin{bmatrix} 9 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 2A + \begin{bmatrix} 5 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

فإن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

T F

تمارين للمراجعة

- اختر الإجابة الصحيحة

عناصر المصفوفة 2×2 معطاه بالصيغة التاليه

$$a_{ij} = \frac{1}{2}|-3i + j|$$

أوجد قيمة العنصر a_{21}

$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$

3-1

تمارين الواجب للفصل الثالث

رقم الصفحة	رقم التمرين
156	1(iii)
157	5 (i, iii, iv, vi)

من كتاب مبادئ الرياضيات وتطبيقاتها في العلوم الإدارية والإنسانية الطبعة الحادية عشرة